



**Phần I. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.**

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 22. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P) : x - 3y + 2z - 1 = 0$  là

- A.  $(1; -3; -1)$       B.  $(1; -3; 2)$       C.  $(-3; 2; -1)$       D.  $(1; 3; 2)$

**Câu 2.** Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P) : 2x + 4z - 3 = 0$ ?

- A.  $(1; 0; 2)$       B.  $(2; 4; -3)$       C.  $(2; 4; 0)$       D.  $(1; 2; 0)$

**Câu 3.** Vectơ  $\vec{n} \neq \vec{0}$  được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  nếu giá của  $\vec{n}$

- A. song song với  $(\alpha)$       B. nằm trong  $(\alpha)$   
C. vuông góc với  $(\alpha)$       D. cắt  $(\alpha)$

**Câu 4.** Cho  $\vec{u} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{v} = (0; 1; 1)$ . Khi đó  $[\vec{u}, \vec{v}]$  bằng

- A.  $(1; -1; 1)$       B.  $(1; -1; -1)$       C.  $(0; 1; 0)$       D.  $(1; 1; 1)$

**Câu 5.** Cho hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$  khác  $\vec{0}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$  khi và chỉ khi  $\vec{u}, \vec{v}$  cùng phương  
B.  $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$  khi và chỉ khi  $\vec{u} \perp \vec{v}$   
C.  $[\vec{u}, \vec{v}]$  cùng phương với  $\vec{u}$   
D.  $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{u} \cdot \vec{v}$

**Câu 6.** Cho  $\vec{u} = (2; 0; 1)$ ,  $\vec{v} = (1; 3; 0)$ . Khi đó  $[\vec{u}, \vec{v}]$  bằng

- A.  $(3; 1; 6)$       B.  $(-3; 1; 6)$       C.  $(-3; -1; 6)$       D.  $(2; 0; 0)$

**Câu 7.** Một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng  $(Oxy)$  là

- A.  $\vec{i}$  và  $\vec{k}$       B.  $\vec{j}$  và  $\vec{k}$       C.  $\vec{i}$  và  $2\vec{i}$       D.  $\vec{i}$  và  $\vec{j}$

**Câu 8.** Nếu  $\vec{u}, \vec{v}$  là một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng  $(P)$  thì một vectơ pháp tuyến của  $(P)$  là

- A.  $\vec{u} + \vec{v}$       B.  $\vec{u} - \vec{v}$       C.  $[\vec{u}, \vec{v}]$       D.  $2\vec{u}$

**Câu 9.** Phương trình nào sau đây là phương trình của một mặt phẳng?

- A.  $x^2 + y - z = 0$       B.  $xy - z = 1$       C.  $x + y^2 = 2$       D.  $3x - y + z = 0$

**Câu 10.** Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng  $(P) : x + y - 2z + 1 = 0$ ?

- A.  $(1; 1; 1)$       B.  $(1; 0; 1)$       C.  $(0; 0; 0)$       D.  $(2; 1; 0)$

**Câu 11.** Mặt phẳng  $(Oxz)$  có phương trình là

- A.  $x = 0$       B.  $y = 0$       C.  $z = 0$       D.  $x + z = 0$

**Câu 12.** Mặt phẳng đi qua  $M(0; 0; 2)$  và song song với mặt phẳng  $(Oxy)$  có phương trình là

- A.  $z - 2 = 0$       B.  $z + 2 = 0$   
C.  $x + y - 2 = 0$       D.  $x + y + z - 2 = 0$

**Câu 13.** Mặt phẳng đi qua  $M(1; 0; -2)$  và có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (2; -1; 3)$  có phương trình là

- A.  $2x - y + 3z + 4 = 0$       B.  $2x - y + 3z - 4 = 0$   
C.  $x - 2z + 4 = 0$       D.  $2x - y + 3z + 2 = 0$

**Câu 14.** Cho  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(3; 1; -1)$ . Mặt phẳng đi qua  $M(2; -1; 1)$  và vuông góc với đường thẳng  $AB$  có phương trình là

- A.  $2x + y - 2z + 1 = 0$                       B.  $2x - y + z - 6 = 0$   
C.  $2x + y - 2z - 1 = 0$                       D.  $2x + y - 2z - 3 = 0$

**Câu 15.** Mặt phẳng đi qua  $A(3; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(0; 0; -1)$  có phương trình là

- A.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1$               B.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - z = 1$               C.  $3x + 2y - z = 1$               D.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - z = 0$

**Câu 16.** Mặt phẳng đi qua  $O$  và có cặp vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{v} = (0; 1; 2)$  có phương trình là

- A.  $2x + 2y + z = 0$               B.  $2x - 2y + z - 1 = 0$               C.  $2x - 2y + z = 0$               D.  $x + 2y + 2z = 0$

**Câu 17.** Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng  $(P) : x + y + z - 1 = 0$ ?

- A.  $2x + 2y + 2z = 0$                       B.  $x + y - z = 0$   
C.  $x + y = 0$                                   D.  $x - 2y + z = 0$

**Câu 18.** Giá trị của  $m$  để mặt phẳng  $(P) : 2x - y + mz + 1 = 0$  vuông góc với mặt phẳng  $(Q) : x + y + z = 0$  là

- A.  $m = -1$                       B.  $m = 1$                       C.  $m = 2$                       D.  $m = -2$

**Câu 19.** Mặt phẳng nào sau đây song song với mặt phẳng  $(P) : x - y + 2z + 1 = 0$ ?

- A.  $2x - 2y + 4z + 2 = 0$                       B.  $x + y + 2z = 0$   
C.  $2x - 2y + 4z + 3 = 0$                       D.  $x - y - 2z + 1 = 0$

**Câu 20.** Khoảng cách từ gốc toạ độ  $O$  đến mặt phẳng  $(P) : 2x + y - 2z + 6 = 0$  bằng

- A. 6                      B. 3                      C.  $\frac{2}{3}$                       D. 2

**Câu 21.** Khoảng cách từ  $M(1; 2; 3)$  đến mặt phẳng  $(P) : x + 2y + 2z - 2 = 0$  bằng

- A. 9                      B.  $\frac{11}{3}$                       C. 3                      D. 1

**Câu 22.** Khoảng cách giữa hai mặt phẳng  $(P) : x + 2y - 2z + 1 = 0$  và  $(Q) : x + 2y - 2z - 5 = 0$  bằng

- A. 6                      B.  $\frac{4}{3}$                       C. 2                      D. 4

## Phần II. Câu hỏi trắc nghiệm đúng sai.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 10. Mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu hỏi thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho mặt phẳng  $(P) : 2x - 3y + z - 4 = 0$ .

- a)  $\vec{n} = (2; -3; 1)$  là một vectơ pháp tuyến của  $(P)$ .  
b) Điểm  $M(1; 0; 2)$  thuộc  $(P)$ .  
c)  $\vec{m} = (-2; 3; 1)$  là một vectơ pháp tuyến của  $(P)$ .  
d)  $(P)$  cắt trục  $Ox$  tại điểm  $(2; 0; 0)$ .

**Câu 2.** Cho  $\vec{u} = (1; 2; 0)$ ,  $\vec{v} = (0; 1; -1)$ .

- a)  $[\vec{u}, \vec{v}] = (-2; 1; 1)$ .  
b)  $[\vec{u}, \vec{v}]$  vuông góc với  $\vec{u}$ .  
c)  $\vec{u}, \vec{v}$  cùng phương.  
d)  $[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{u}]$ .

**Câu 3.** Cho  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 1; 0)$ ,  $C(0; 0; 1)$ .

- a)  $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 0)$ .
- b)  $\vec{n} = (1; 1; 1)$  là một vectơ pháp tuyến của  $(ABC)$ .
- c)  $(ABC) : x + y + z - 1 = 0$ .
- d) Góc toạ độ  $O$  thuộc  $(ABC)$ .

**Câu 4.** Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $M(1; 1; 1)$  và song song với  $(Q) : x - 2y + z + 3 = 0$ .

- a)  $(1; -2; 1)$  là một vectơ pháp tuyến của  $(P)$ .
- b)  $(P) : x - 2y + z - 1 = 0$ .
- c)  $(P)$  đi qua gốc toạ độ.
- d)  $(P)$  trùng với  $(Q)$ .

**Câu 5.** Cho  $(P) : x + 2y - z + 1 = 0$ ,  $(Q) : 2x - y + 3 = 0$ ,  $(R) : x + 2y - z - 3 = 0$ .

- a)  $(P) \parallel (Q)$ .
- b)  $(P) \parallel (R)$ .
- c)  $(Q) \perp (R)$ .
- d)  $(P)$  và  $(R)$  trùng nhau.

**Câu 6.** Cho  $(P) : x - y + z - 2 = 0$  và  $(Q) : 2x - 2y + 2z + m = 0$  ( $m$  là tham số).

- a) Vectơ pháp tuyến của  $(Q)$  bằng 2 lần vectơ pháp tuyến của  $(P)$ .
- b) Với  $m = -4$ , hai mặt phẳng trùng nhau.
- c) Với  $m = 4$ , hai mặt phẳng trùng nhau.
- d) Với mọi  $m$ , hai mặt phẳng cắt nhau.

**Câu 7.** Cho  $M(2; -1; 1)$  và  $(P) : 2x - 2y + z + 3 = 0$ .

- a)  $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 3$ .
- b)  $d(M, (P)) = \frac{10}{3}$ .
- c)  $d(O, (P)) = 1$ .
- d) Mặt phẳng  $(Q) : 2x - 2y + z - 7 = 0$  cách  $(P)$  một khoảng bằng 4.

**Câu 8.** Cho  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(2; 1; 2)$ ,  $C(1; -1; 2)$ .

- a)  $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$ .
- b)  $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; -1; -1)$ .
- c)  $(ABC) : 2x - y - z + 1 = 0$ .
- d) Góc toạ độ  $O$  không thuộc  $(ABC)$ .

**Câu 9.** Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $A(1; 2; 0)$ , vuông góc với cả hai mặt phẳng  $(Q) : x + y + z = 0$  và  $(R) : x - y = 0$ .

- a) Hai vectơ pháp tuyến của  $(Q)$  và  $(R)$  là một cặp vectơ chỉ phương của  $(P)$ .
- b)  $(P)$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (1; -1; 0)$ .
- c)  $(P) : x + y - 2z - 3 = 0$ .
- d)  $(P)$  đi qua gốc toạ độ.

**Câu 10.** Cho  $A(1; 1; 1)$  và  $(P) : x + 2y + 2z - 1 = 0$ .

- a)  $d(A, (P)) = \frac{4}{9}$ .
- b) Mặt phẳng qua  $A$  song song với  $(P)$  là  $x + 2y + 2z - 5 = 0$ .
- c) Khoảng cách giữa  $(P)$  và mặt phẳng ở ý b) bằng  $\frac{4}{3}$ .
- d)  $(P)$  cắt trục  $Oz$  tại điểm  $(0; 0; 1)$ .

### Phần III. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 10.

**Câu 1.** Cho  $\vec{u} = (3; -1; 2)$ ,  $\vec{v} = (1; 2; -1)$  và  $[\vec{u}, \vec{v}] = (a; b; c)$ . Tính  $a + b + c$ .

**Câu 2.** Cho  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(2; 0; 1)$ ,  $C(0; 1; 2)$ . Tính khoảng cách từ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

**Câu 3.** Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $M(1; -1; 2)$  và song song với  $(Q) : 2x - y + 2z + 7 = 0$ . Tính khoảng cách giữa  $(P)$  và  $(Q)$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

**Câu 4.** Tìm  $m$  để mặt phẳng  $(P) : (m + 1)x - 2y + z - 1 = 0$  vuông góc với mặt phẳng  $(Q) : 2x + y - 4z + 3 = 0$ .

**Câu 5.** Tìm  $m, n$  để mặt phẳng  $(P) : 2x + my - 4z + 1 = 0$  song song với mặt phẳng  $(Q) : x - 3y + nz - 5 = 0$ . Tính  $m + n$ .

**Câu 6.** Tính khoảng cách từ  $M(3; -2; 1)$  đến mặt phẳng  $(P) : 2x - y - 2z + 3 = 0$ .

**Câu 7.** Cho điểm  $A(1; 1; m)$  với  $m > 0$  và mặt phẳng  $(P) : x + 2y + 2z - 3 = 0$ . Tìm  $m$  để khoảng cách từ  $A$  đến  $(P)$  bằng 2.

**Câu 8.** Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $M(1; 2; 3)$  và cắt các tia  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt tại  $A(a; 0; 0)$ ,  $B(0; a; 0)$ ,  $C(0; 0; a)$  với  $a > 0$ . Tìm  $a$ .

**Câu 9.** Cho  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 3; 0)$ ,  $C(0; 0; 6)$ . Tính khoảng cách từ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  (làm tròn đến hàng phần mười).

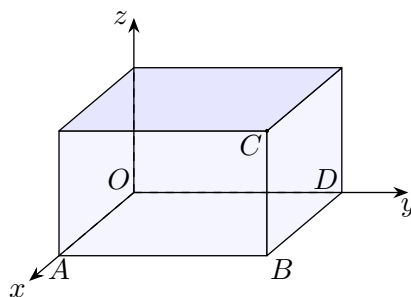
**Câu 10.** Moment lực  $\vec{M} = [\vec{OP}, \vec{F}]$  (Vận dụng 1, Bài 14). Một lực  $\vec{F} = (0; 0; -20)$  (N) tác dụng tại điểm  $P$  với  $\vec{OP} = (0; 0,5; 0)$  (m). Tính độ lớn của moment lực (N·m).

### PHẦN NÂNG CAO

#### Nâng cao 1. Câu hỏi trắc nghiệm đúng sai.

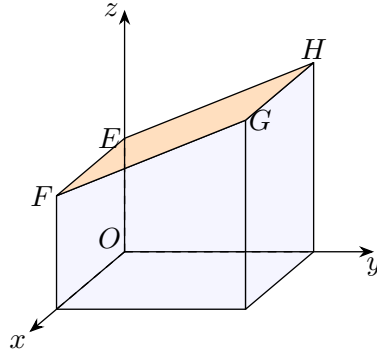
Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 5. Mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu hỏi thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật có sàn là mặt phẳng  $(Oxy)$ , các góc sàn  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(4; 0; 0)$ ,  $B(4; 5; 0)$ ,  $D(0; 5; 0)$ , trần cao 3 m (đơn vị: mét). Camera đặt ở góc trần  $C(4; 5; 3)$  (hình bên dưới).



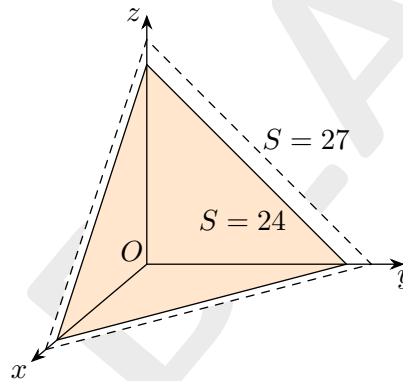
- a) Mặt phẳng chứa trần nhà có phương trình  $z - 3 = 0$ .
- b) Bức tường chứa  $O$  và  $A$  (vuông góc với sàn) nằm trong mặt phẳng  $x = 0$ .
- c) Khoảng cách từ camera đến sàn bằng 3 m.
- d) Hai bức tường chứa  $OA$  và  $OD$  song song với nhau.

**Câu 2.** Mái của một nhà kho là hình chữ nhật  $EFGH$  với  $E(0; 0; 3)$ ,  $F(4; 0; 3)$ ,  $G(4; 5; 5)$ ,  $H(0; 5; 5)$  (đơn vị: mét), sàn là mặt phẳng  $(Oxy)$  (hình bên dưới).



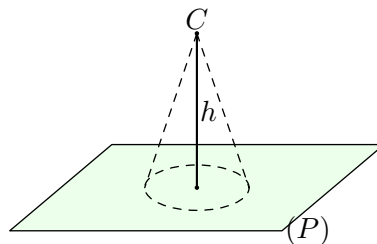
- $\vec{n} = (0; 2; -5)$  là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng mái.
- Mặt phẳng mái song song với trục  $Oy$ .
- Mặt phẳng mái có phương trình  $2y - 5z + 15 = 0$ .
- Mái nhà vuông góc với mặt sàn.

**Câu 3.** Điểm thi ba môn Toán, Ngữ văn, Tiếng Anh của một học sinh được biểu diễn bởi điểm  $(x; y; z)$ . Các học sinh có cùng tổng điểm  $S$  ứng với các điểm thuộc mặt phẳng  $x + y + z - S = 0$  (hình bên dưới).



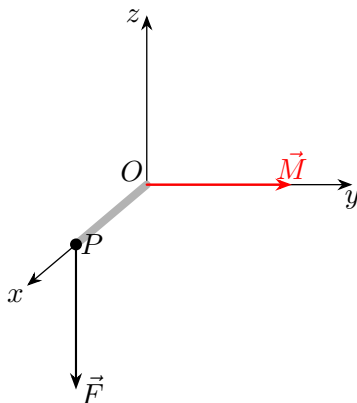
- Các học sinh có tổng điểm 24 ứng với mặt phẳng  $x + y + z - 24 = 0$ .
- Hai mặt phẳng ứng với  $S = 24$  và  $S = 27$  song song với nhau.
- Điểm  $(8; 8; 9)$  thuộc mặt phẳng ứng với  $S = 24$ .
- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng ứng với  $S = 24$  và  $S = 27$  bằng  $\sqrt{3}$ .

**Câu 4.** Một camera đặt tại  $C(1; 2; 4)$  quan sát mặt sàn nằm trong mặt phẳng  $(P) : 2x + y + 2z - 1 = 0$  (đơn vị: mét). Góc quan sát của camera là  $120^\circ$ , trục quan sát vuông góc với  $(P)$ ; vùng quan sát được trên  $(P)$  là hình tròn có bán kính  $r = h \tan 60^\circ$  với  $h$  là khoảng cách từ camera đến  $(P)$  (hình bên dưới).



- $h = \frac{11}{3}$  m.
- $\vec{n} = (2; 1; -1)$  là một vectơ pháp tuyến của  $(P)$ .
- Bán kính vùng quan sát  $r \approx 6,35$  m.
- Vùng quan sát là hình tròn bán kính  $\frac{11}{3}$  m.

**Câu 5.** Vận bu lông tại  $O$  bằng cờ lê: lực  $\vec{F} = (0; 0; -40)$  (N) đặt tại điểm  $P$  của cán với  $\vec{OP} = (0; 2; 0; 0)$  (m). Moment lực  $\vec{M} = [\vec{OP}, \vec{F}]$  (hình bên dưới).

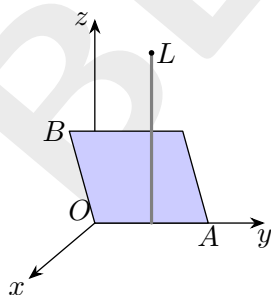


- $\vec{M} = (0; 8; 0)$ .
- Độ lớn moment lực bằng 8 N·m.
- Nếu dùng cán dài gấp đôi ( $\vec{OP}$  gấp đôi) với cùng lực  $\vec{F}$  thì moment lực không đổi.
- $\vec{M}$  cùng phương với  $\vec{F}$ .

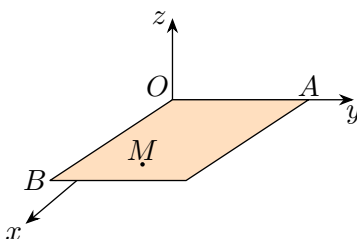
## Nâng cao 2. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 5.

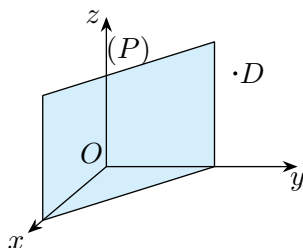
**Câu 1.** Một tấm pin mặt trời phẳng có ba đỉnh  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(0; 2; 0)$ ,  $B(1; 0; 2)$  (đơn vị: mét). Đỉnh một cột đèn ở vị trí  $L(0; 1; 3)$ . Tính khoảng cách (m) từ  $L$  đến mặt phẳng chứa tấm pin (làm tròn đến hàng phần trăm).



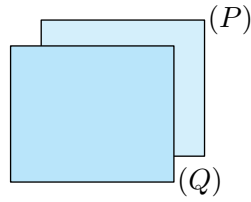
**Câu 2.** Mặt một dốc xe lăn nằm trong mặt phẳng chứa  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(0; 3; 0)$  và  $B(6; 0; 0,5)$  (đơn vị: mét). Một điểm  $M$  trên mặt dốc có hoành độ 4,8. Tính độ cao  $z$  (m) của  $M$ .



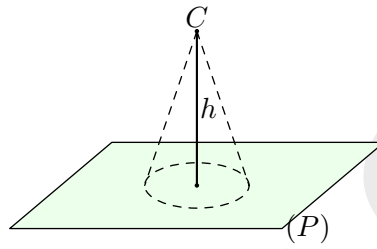
**Câu 3.** Mặt kính của một toà nhà nằm trong mặt phẳng thẳng đứng  $(P) : 3x + 4y - 50 = 0$  (đơn vị: mét). Một flycam bay ở vị trí  $D(10; 20; 30)$ . Tính khoảng cách (m) từ flycam đến mặt kính.



**Câu 4.** Hai tấm kính của một cửa sổ cách âm nằm trong hai mặt phẳng song song  $(P) : 2x - y + 2z - 3 = 0$  và  $(Q) : 2x - y + 2z + 6 = 0$  (đơn vị: centimét). Tính khoảng cách (cm) giữa hai tấm kính.



**Câu 5.** Một camera đặt tại  $C(0; 0; 3,5)$  có góc quan sát  $90^\circ$ , trực quan sát vuông góc với mặt sàn nghiêng  $(P) : x + 2y + 2z - 1 = 0$  (đơn vị: mét). Vùng quan sát trên  $(P)$  là hình tròn bán kính  $r = h \tan 45^\circ$ ,  $h$  là khoảng cách từ  $C$  đến  $(P)$ . Tính diện tích vùng quan sát ( $m^2$ , làm tròn đến hàng phần mười).



HẾT