



Phần tự luận.

Học sinh trình bày lời giải chi tiết các bài từ bài 1 đến bài 7.

Bài 1. (Nhận biết nguyên hàm) Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không? Vì sao?

a) $F(x) = (x - 1)e^x$ và $f(x) = xe^x$ trên $\mathbb{R}$;

b) $F(x) = x + \frac{1}{x}$ và $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Bài 2. (Hàm đa thức, khai triển, tách phân thức) Tìm:

a) $\int (4x^3 - 6x^2 + 2x - 5) dx$;

b) $\int (3x - 1)^2 dx$;

c) $\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x} dx$ trên $(0; +\infty)$;

d) $\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$ trên $(0; +\infty)$.

Bài 3. (Hàm lũy thừa với số mũ thực) Trên khoảng $(0; +\infty)$, tìm:

a) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$;

b) $\int \sqrt[3]{x}(x + 1) dx$;

c) $\int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2}\right) dx$;

d) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

Bài 4. (Hàm số lượng giác) Tìm:

a) $\int (3 \sin x - 2 \cos x) dx$;

b) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x}\right) dx$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\int 2 \cos^2 \frac{x}{2} dx$;

d) $\int \cot^2 x dx$ trên $(0; \pi)$.

Bài 5. (Hàm số mũ) Tìm:

a) $\int (2e^x - 5^x) dx$;

b) $\int 3^x \cdot 2^x dx$;

c) $\int e^x (2 - e^{-x}) dx$;

d) $\int \frac{4^x + 1}{2^x} dx$.

Bài 6. (Nguyên hàm thỏa mãn điều kiện cho trước)

a) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^x - 4x$ trên $\mathbb{R}$, biết $F(0) = 3$.

b) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} + 2$ trên $(0; \pi)$, biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

c) Đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ có hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(x; f(x))$ bằng $3x^2 - 2x + 1$ và (C) đi qua điểm $A(1; 4)$. Tìm $f(x)$.

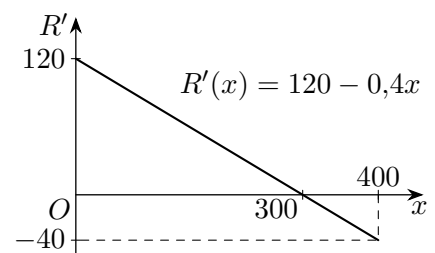
Bài 7. (Bài toán thực tiễn) Một cửa hàng bán x sản phẩm $(0 \leq x \leq 400)$ có doanh thu cận biên $R'(x) = 120 - 0,4x$ (nghìn đồng/sản phẩm) (hình bên), với $R(x)$ là doanh thu (nghìn đồng) và $R(0) = 0$.

a) Tìm hàm doanh thu $R(x)$.

b) Tính doanh thu khi cửa hàng bán được 100 sản phẩm.

c) Cửa hàng bán bao nhiêu sản phẩm thì doanh thu lớn nhất?

Tính doanh thu lớn nhất đó.



Phần I. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 22. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên $\mathbb{R}$?

- A. $f(x) = \frac{x^4}{4}$ B. $f(x) = 3x$ C. $f(x) = x^2$ D. $f(x) = 3x^2$

Câu 2. Hàm số $F(x) = \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên $\mathbb{R}$?

- A. $f(x) = -\cos x$ B. $f(x) = \cos x$ C. $f(x) = -\sin x$ D. $f(x) = \sin x$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K . Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu

- A. $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$ B. $f'(x) = F(x)$ với mọi $x \in K$
C. $F(x) = f(x) + C$ với mọi $x \in K$ D. $F'(x) = f'(x)$ với mọi $x \in K$

Câu 4. Cho $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của cùng một hàm số $f(x)$ trên khoảng K . Khi đó, trên K , hiệu $F(x) - G(x)$ bằng

- A. 0 B. một hằng số C. $f(x)$ D. $2F(x)$

Câu 5. $\int 0 \, dx$ bằng

- A. C B. 0 C. x D. $x + C$

Câu 6. $\int dx$ bằng

- A. C B. $1 + C$ C. $x + C$ D. $\frac{x^2}{2} + C$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\int 4f(x) \, dx = \int f(x) \, dx + 4$ B. $\int 4f(x) \, dx = 4x \int f(x) \, dx$
C. $\int 4f(x) \, dx = 4 \int f(x) \, dx$ D. $\int 4f(x) \, dx = \int 4 \, dx \cdot \int f(x) \, dx$

Câu 8. $\int (x^2 + 2x) \, dx$ bằng

- A. $2x + 2 + C$ B. $x^3 + x^2 + C$ C. $\frac{x^3}{3} + x^2 + C$ D. $\frac{x^3}{3} + 2x^2 + C$

Câu 9. $\int x^7 \, dx$ bằng

- A. $7x^6 + C$ B. $\frac{x^8}{7} + C$ C. $x^8 + C$ D. $\frac{x^8}{8} + C$

Câu 10. Trên khoảng $(0; +\infty)$, $\int \frac{1}{x} \, dx$ bằng

- A. $-\frac{1}{x^2} + C$ B. $\frac{1}{x^2} + C$ C. $x \ln x + C$ D. $\ln x + C$

Câu 11. Trên khoảng $(0; +\infty)$, $\int \sqrt{x} \, dx$ bằng

- A. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$ B. $\frac{1}{2\sqrt{x}} + C$ C. $\frac{3}{2}x\sqrt{x} + C$ D. $x\sqrt{x} + C$

Câu 12. Trên khoảng $(0; +\infty)$, $\int \frac{1}{x^2} \, dx$ bằng

- A. $\frac{1}{x} + C$ B. $-\frac{2}{x^3} + C$ C. $-\frac{1}{x} + C$ D. $\ln x^2 + C$

Câu 13. $\int \cos x \, dx$ bằng

- A. $\sin x + C$ B. $-\sin x + C$ C. $\cos x + C$ D. $-\cos x + C$

Câu 14. $\int \sin x \, dx$ bằng

- A. $\cos x + C$ B. $-\cos x + C$ C. $\sin x + C$ D. $-\sin x + C$

Câu 15. Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$ bằng

- A. $-\tan x + C$ B. $\cot x + C$ C. $-\cot x + C$ D. $\tan x + C$

Câu 16. Trên khoảng $(0; \pi)$, $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx$ bằng

- A. $\cot x + C$ B. $\tan x + C$ C. $-\tan x + C$ D. $-\cot x + C$

Câu 17. $\int e^x \, dx$ bằng

- A. $xe^{x-1} + C$ B. $e^x + C$ C. $\frac{e^{x+1}}{x+1} + C$ D. $e^{x+1} + C$

Câu 18. $\int 3^x \, dx$ bằng

- A. $3^x \ln 3 + C$ B. $\frac{3^{x+1}}{x+1} + C$ C. $x \cdot 3^{x-1} + C$ D. $\frac{3^x}{\ln 3} + C$

Câu 19. Trên khoảng $(0; +\infty)$, $\int \left(3x^2 - \frac{1}{x}\right) \, dx$ bằng

- A. $x^3 + \ln x + C$ B. $x^3 - \ln x + C$ C. $6x + \frac{1}{x^2} + C$ D. $x^3 + \frac{1}{x^2} + C$

Câu 20. $\int (2 \cos x + 3 \sin x) \, dx$ bằng

- A. $2 \sin x - 3 \cos x + C$ B. $2 \sin x + 3 \cos x + C$
C. $-2 \sin x + 3 \cos x + C$ D. $-2 \sin x - 3 \cos x + C$

Câu 21. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2x$ trên $\mathbb{R}$ và $F(0) = 1$. Khi đó $F(x)$ bằng

- A. x^2 B. $2x^2 + 1$ C. $x^2 - 1$ D. $x^2 + 1$

Câu 22. $\int (e^x - 2) \, dx$ bằng

- A. $e^x - 2x + C$ B. $e^x - 2 + C$ C. $e^x + C$ D. $e^x - x^2 + C$

Phần II. Câu hỏi trắc nghiệm đúng sai.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 10. Mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu hỏi thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x$.

a) Hàm số $y = x^3 + x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

b) $\int f(x) \, dx = x^3 + 2x^2 + C$.

c) Nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$ là $F(x) = x^3 + x^2 + 2$.

d) Với $F(x)$ ở ý c), $F(1) = 3$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \cos x - \sin x$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

- a) $\int f(x) dx = \sin x + \cos x + C$.
- b) $F(x) = \sin x + \cos x$.
- c) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
- d) $F(\pi) = -1$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$.

- a) $\int f(x) dx = e^x + x^2 + C$.
- b) $F(x) = e^x + x^2 - 1$.
- c) $F(1) = e + 1$.
- d) Hàm số $y = F(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1) = 2$.

- a) $\int f(x) dx = \ln x + x + C$.
- b) $F(x) = \ln x + x$.
- c) $F(e) = e + 2$.
- d) $F(x) \geq 2$ với mọi $x \geq 1$.

Câu 5. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

- a) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.
- b) $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với mọi hằng số $k \neq 0$.
- c) $\int f(x)g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$.
- d) $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = (x + 1)^2$.

- a) $f(x) = x^2 + 1$.
- b) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$.
- c) Hàm số $y = \frac{(x + 1)^3}{3}$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.
- d) $\int (x + 1)^2 dx = (x + 1)^3 + C$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = 2^x$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$.

- a) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.
- b) $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C$.
- c) $F(x) = \frac{2^x - 1}{\ln 2}$.
- d) $F(1) = \frac{1}{\ln 2}$.

Câu 8. Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 10 - 2t$ (m/s), t tính bằng giây. Gọi $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau t giây, $s(0) = 0$.

- a) $s(t) = 10t - 2t^2$.
- b) Vật dừng lại tại thời điểm $t = 5$ giây.
- c) Từ lúc bắt đầu đến khi dừng, vật đi được 25 m.
- d) $s(2) = 20$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(0) = 0$.

- a) $\int f(x) dx = \tan x - x + C$.
- b) $f(x) = \tan^2 x$.
- c) $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\pi}{4}$.
- d) $\int \tan^2 x dx = \frac{\tan^3 x}{3} + C$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = x\sqrt{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(1) = \frac{2}{5}$.

- a) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$.
- b) $\int f(x) dx = \frac{5}{2}x^2\sqrt{x} + C$.
- c) $F(4) = \frac{64}{5}$.
- d) $\int f(x) dx = \frac{3}{2}\sqrt{x} + C$.

Phần III. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 10.

Câu 1. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ và $F(1) = 3$. Tính $F(2)$.

Câu 2. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2^x \ln 2$ và $F(0) = 3$. Tính $F(3)$.

Câu 3. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ và $F(1) = e$. Tính $F(2)$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 4. Biết hàm số $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ là một nguyên hàm của $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$ trên $\mathbb{R}$. Tính $a + b + c$.

Câu 5. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \sin x + \cos x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. Tính $F(\pi)$.

Câu 6. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ và $F(1) = \frac{3}{2}$. Tính $F(e)$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 7. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{4}{\cos^2 x}$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(0) = 1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 8. Một chất điểm chuyển động thẳng với gia tốc $a(t) = 6t$ (m/s²), vận tốc ban đầu $v(0) = 2$ (m/s) và $s(0) = 0$, trong đó $s(t)$ là quãng đường (m) đi được sau t giây. Tính $s(3)$.

Câu 9. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x - 2x$ và $F(0) = 4$. Tính $F(\ln 4)$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

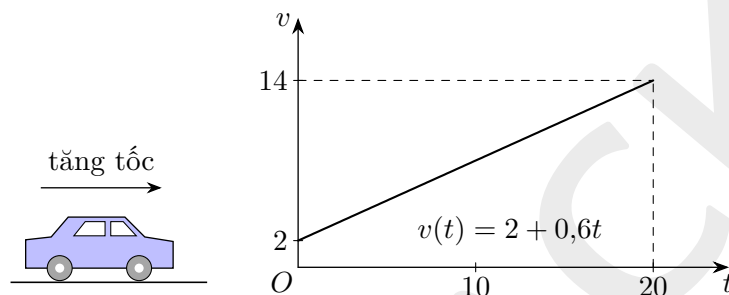
Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = 2x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 5$. Tính $f(2)$.

PHẦN NÂNG CAO

Nâng cao 1. Câu hỏi trắc nghiệm đúng sai.

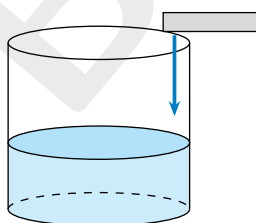
Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 5. Mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu hỏi thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một ô tô bắt đầu tăng tốc với vận tốc $v(t) = 2 + 0,6t$ (m/s), $0 \leq t \leq 20$, t tính bằng giây (hình dưới). Gọi $s(t)$ là quãng đường ô tô đi được sau t giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.



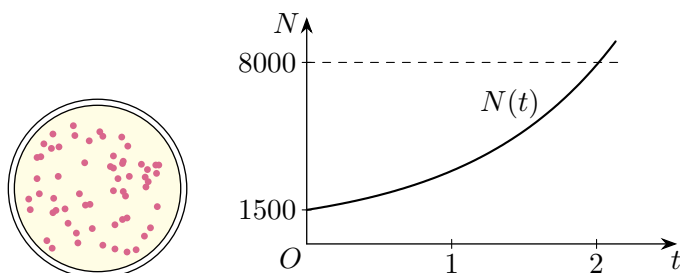
- a) $s(t) = 2t + 0,3t^2$.
- b) Vận tốc của ô tô tại thời điểm $t = 20$ là 12 m/s.
- c) Trong 20 giây đầu ô tô đi được 160 m.
- d) Trong 10 giây cuối (từ $t = 10$ đến $t = 20$) ô tô đi được 80 m.

Câu 2. Một bể chứa nước có dung tích 50 m^3 , lúc đầu chứa sẵn 5 m^3 nước. Người ta bơm nước vào bể với tốc độ $V'(t) = 0,4t + 2$ ($\text{m}^3/\text{giờ}$), trong đó $V(t)$ là thể tích nước trong bể sau t giờ (hình dưới).



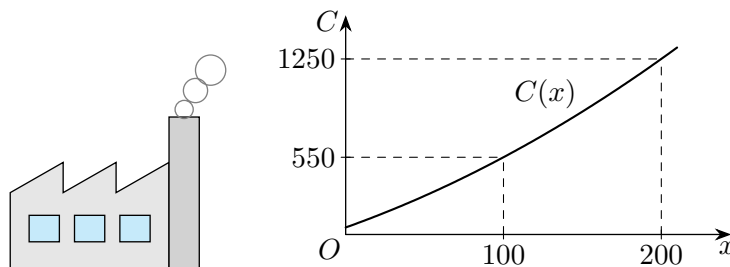
- a) $V(t) = 0,2t^2 + 2t + 5$.
- b) Sau 5 giờ, trong bể có 20 m^3 nước.
- c) Sau 10 giờ thì bể đầy nước.
- d) Sau 6 giờ, trong bể có $24,2 \text{ m}^3$ nước.

Câu 3. Số lượng vi khuẩn $N(t)$ trong một mẫu nuôi cấy tăng với tốc độ $N'(t) = 1000e^t$ (con/giờ), t tính bằng giờ. Lúc đầu mẫu có 1500 con vi khuẩn (hình dưới).



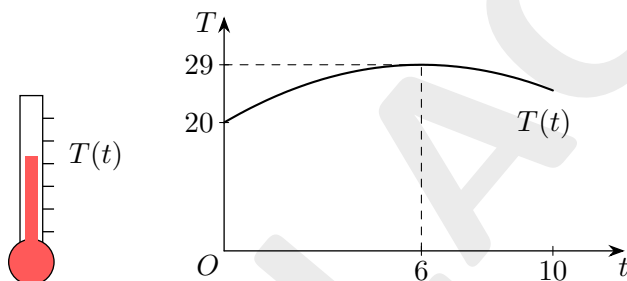
- a) $N(t) = 1000e^t + 1500$.
- b) Sau 1 giờ, số vi khuẩn xấp xỉ 3218 con.
- c) Sau 2 giờ, số vi khuẩn vượt quá 8000 con.
- d) Tốc độ tăng số vi khuẩn tăng dần theo thời gian.

Câu 4. Một xưởng sản xuất có chi phí cận biên $C'(x) = 0,02x + 4$ (triệu đồng/tấn) khi đã sản xuất x tấn sản phẩm; chi phí cố định là 50 triệu đồng, tức $C(0) = 50$, với $C(x)$ là tổng chi phí (triệu đồng) (hình dưới).



- $C(x) = 0,01x^2 + 4x + 50$.
- Tổng chi phí sản xuất 100 tấn là 550 triệu đồng.
- Khi sản xuất 100 tấn, chi phí trung bình mỗi tấn là 5 triệu đồng.
- Chi phí để sản xuất thêm từ tấn thứ 101 đến tấn thứ 200 là 700 triệu đồng.

Câu 5. Theo dõi nhiệt độ ngoài trời từ 6 giờ sáng, người ta thấy nhiệt độ $T(t)$ ($^{\circ}\text{C}$) sau t giờ thay đổi với tốc độ $T'(t) = 3 - 0,5t$ ($^{\circ}\text{C}/\text{giờ}$), $0 \leq t \leq 10$, và $T(0) = 20$ (hình dưới).

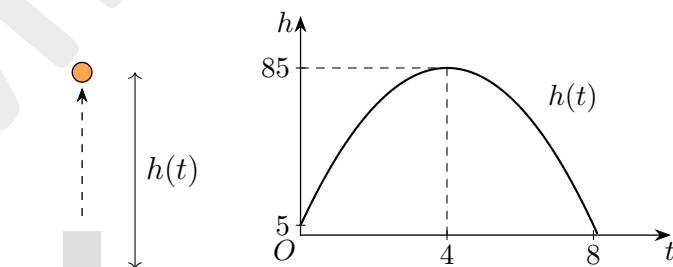


- $T(t) = 20 + 3t - 0,25t^2$.
- Nhiệt độ cao nhất trong khoảng thời gian trên là 29°C , đạt lúc 12 giờ trưa.
- $T(10) = 30$.
- Lúc 8 giờ sáng nhiệt độ là 24°C .

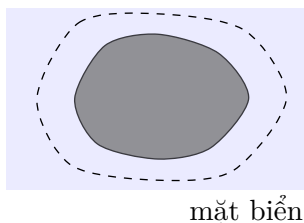
Nâng cao 2. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 5.

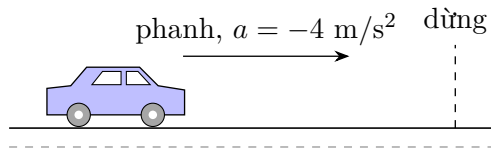
Câu 1. Từ độ cao 5 m so với mặt đất, một quả bóng được ném thẳng đứng lên trên với vận tốc $v(t) = 40 - 10t$ (m/s), t tính bằng giây (hình dưới). Gọi $h(t)$ là độ cao (m) của quả bóng so với mặt đất. Quả bóng đạt độ cao lớn nhất bằng bao nhiêu mét?



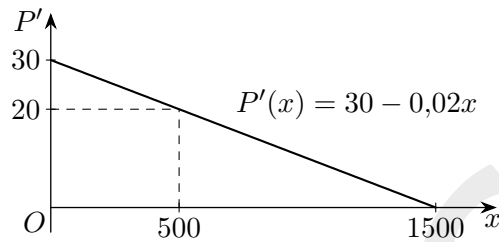
Câu 2. Một vết dầu loang trên mặt biển có diện tích tăng với tốc độ $S'(t) = 2t + 3$ ($\text{m}^2/\text{phút}$), t tính bằng phút kể từ lúc dầu bắt đầu loang ($S(0) = 0$) (hình dưới). Tính diện tích (m^2) vết dầu sau 10 phút.



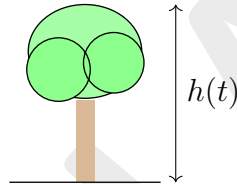
Câu 3. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì phanh, sau đó chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -4 \text{ m/s}^2$ (hình dưới). Tính quãng đường (m) ô tô đi được từ lúc phanh đến khi dừng hẳn.



Câu 4. Lợi nhuận cận biên khi bán x sản phẩm của một cửa hàng là $P'(x) = 30 - 0,02x$ (nghìn đồng/sản phẩm). Khi chưa bán được sản phẩm nào, cửa hàng lỗ 2 triệu đồng, tức $P(0) = -2000$ (nghìn đồng) (hình dưới). Tính lợi nhuận (triệu đồng) khi bán được 500 sản phẩm.



Câu 5. Một cây non cao $0,5 \text{ m}$ khi được trồng. Chiều cao $h(t)$ (m) của cây sau t năm tăng với tốc độ $h'(t) = 0,6\sqrt{t}$ (m/năm) (hình dưới). Tính chiều cao của cây sau 9 năm.



HẾT